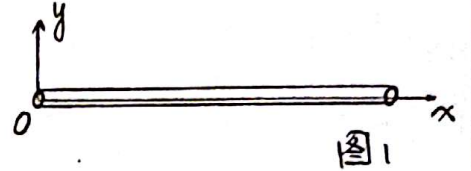


【实验目的】

1. 熟悉动态法测量杨氏模量的基本原理；
2. 掌握动态测量材料杨氏模量的基本测量方法；
3. 学习用外延法测定试样节点处共振频率。

【实验原理】（电学、光学画出原理图）



1. 动态杨氏模量

一根长度 $L \gg$ 直径 d 的细长棒，作微小弯曲振动时满足动力学方程

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \text{ 其中 } J = S \left(\frac{d}{4}\right)^2 \quad (1), (2)$$

①式中 y 为棒上距左端 x 处截面在 y 方向上的位移， ρ 为材料密度， S 为横截面积， E 为杨氏模量 (Pa)， J 为截面惯性矩 (m^4)。

对①式， $x=0$ 和 $x=L$ 处 (即两端) 是自由端，不受正应力和切向力作用。 (边界条件)

令 $y(x, t) = X(x)T(t)$ ，则①式化为 $\frac{1}{x} \frac{d^4 X}{dx^4} = -\frac{\rho S}{EJ} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (3), (4)$

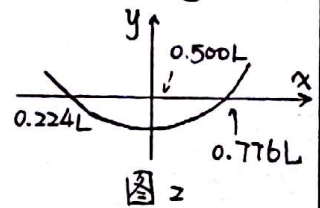
设④ = K^4 ，再设棒中每点都作简谐振动，则通解：

$$\begin{cases} X(x) = a_1 \cosh Kx + a_2 \sinh Kx + a_3 \cos Kx + a_4 \sin Kx \\ T(t) = b \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \text{ 其中 } \omega = \left(\frac{K^4 EJ}{\rho S}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (K \text{ 为常数}) \quad (5)$$

即 $y = X(x)T(t)$ ，由边界条件和 $\cos KL \cdot \cosh KL = 1$

有 $K_1 L = 4.730$ ，此时对应的试样振动频率称为基频， (6)

振动状态如图2所示。可得杨氏模量：



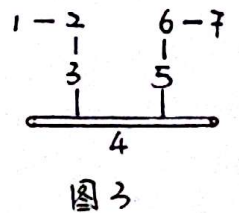
$$E = 1.9978 \times 10^{-3} \frac{\rho L^4 S}{J} \omega^2 = 7.8870 \times 10^{-3} \frac{L^3 m}{J} f^2 \quad (7)$$

又由②， $J = \frac{\pi d^4}{64}$ ，因此 $E = 1.6067 \frac{L^3 m}{d^4} f^2 \quad (8)$

其中 f 为基频共振频率， m 为被测件质量

2. 动态杨氏模量测量方法

如右图：信号源输出等幅正弦波信号经激振器 (3) 转为机械振动加在被测器件 (4) 上，使其受迫作横振动，拾振器 (5) 将其振动转为电信号，经 (6) 放大后通过示波器 (7) 显示出来。



不发生共振时，示波器上波形很小；发生共振时电信号突然增大，此时频率计 (1) 读出的信号即为试样的共振频率，代入⑧式即得 E 。

3. 外延法：并在 [实验内容] 一节中。

【实验内容】（重点说明）

1. 用螺旋测微器测量铜棒直径 d

2. 用刻度尺测量铜棒长度 l

3. 用天平测量铜棒质量 m

4. 共振频率测量

(1) 连接实验装置，将悬丝分别连接在测试棒两端各 1 cm 处（有刻线）

(2) 调节信号发生器的频率，并观察示波器上信号的变化。

当示波器上的拾振信号达到极大，则认为信号发生器的激振频率与测试棒共振，记下该频率 f_1 。

(3) 将两悬丝等间距向里靠拢（每次 10 mm ），调节激振器和拾振器使悬线竖直，重复步骤 2。

(4) 由于节点处被测器件难以被激振和拾振，我们使用外延法测量节点处的共振频率。我们将以上所求的 x 与 f 拟合成曲线，求得曲线最低点（即节点）所对应的共振频率即为试样的基频共振频率 f 。

5. 将上述 d, l, m, f 代入式⑨计算试样的杨氏模量 E 。

【实验器材及注意事项】

实验器材：信号发生器、动态法杨氏模量测试台、

示波器（如右图），测量仪器等

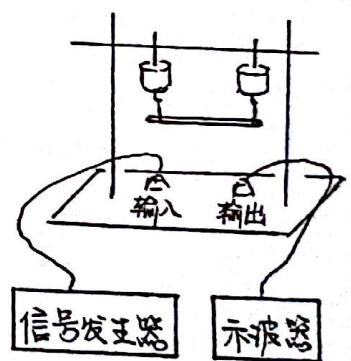
注意事项：① 注意螺旋测微器测量前检查零点修正；

② 注意在每次调节悬线后尽可能保持被测铜棒水平；

③ 调节悬线时应将悬线放在相应的刻度凹槽上；

④ 注意调节换能器（激振器和拾振器）使得悬线尽可能保持垂直；

⑤ 注意激振器信号频率不能过高或过低。



仪器示意图

【数据处理与结果】

1. 金属棒质量 $m = 37.652 \text{ g}$, 不确定度 $U_m = U_B = \frac{\Delta_{\text{仪}} m}{\sqrt{3}} \approx 0.6 \text{ mg}$ (10), (11)

2. 金属棒长度:

n	1	2	3	4	5	6
l/mm	160.0	159.8	159.9	159.9	160.0	160.0

$$l = \frac{\sum_{i=1}^6 l_i}{6} = 159.93 \text{ mm} \quad (12)$$

$$U_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (l_i - l)^2}{6 \times 5}} = 0.04 \text{ mm} \quad (13)$$

$$U_B = \frac{\Delta_{\text{仪}} l}{\sqrt{3}} = 0.12 \text{ mm} \quad (14)$$

$$\therefore U_l = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = 0.13 \text{ mm} \quad (15)$$

3. 金属棒直径: (已修正零点误差)

n	1	2	3	4	5	6
d/mm	5.968	5.965	5.964	5.967	5.965	5.965

$$d = \frac{\sum_{i=1}^6 d_i}{6} = 5.966 \text{ mm} \quad U_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (d_i - d)^2}{5 \times 6}} = 4 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad U_B = \frac{\Delta_{\text{仪}} d}{\sqrt{3}} = 2.3 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad (16) \sim (18)$$

$$\therefore U_d = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = 5 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad (19)$$

4. 共振频率测量

表格数据见附页。 $U_f = U_B = \frac{\Delta_{\text{仪}} f}{\sqrt{3}} = 0.06 \text{ Hz}$. (20)

5. 用外延法作图, 并获取测试棒的固有频率 f

见附页。

可见, 我们使用两种数据拟合出的曲线得出的基频共振频率 f 均在 741.4 Hz 左右, 我们采用 $f = 741.4 \text{ Hz}$. (21)

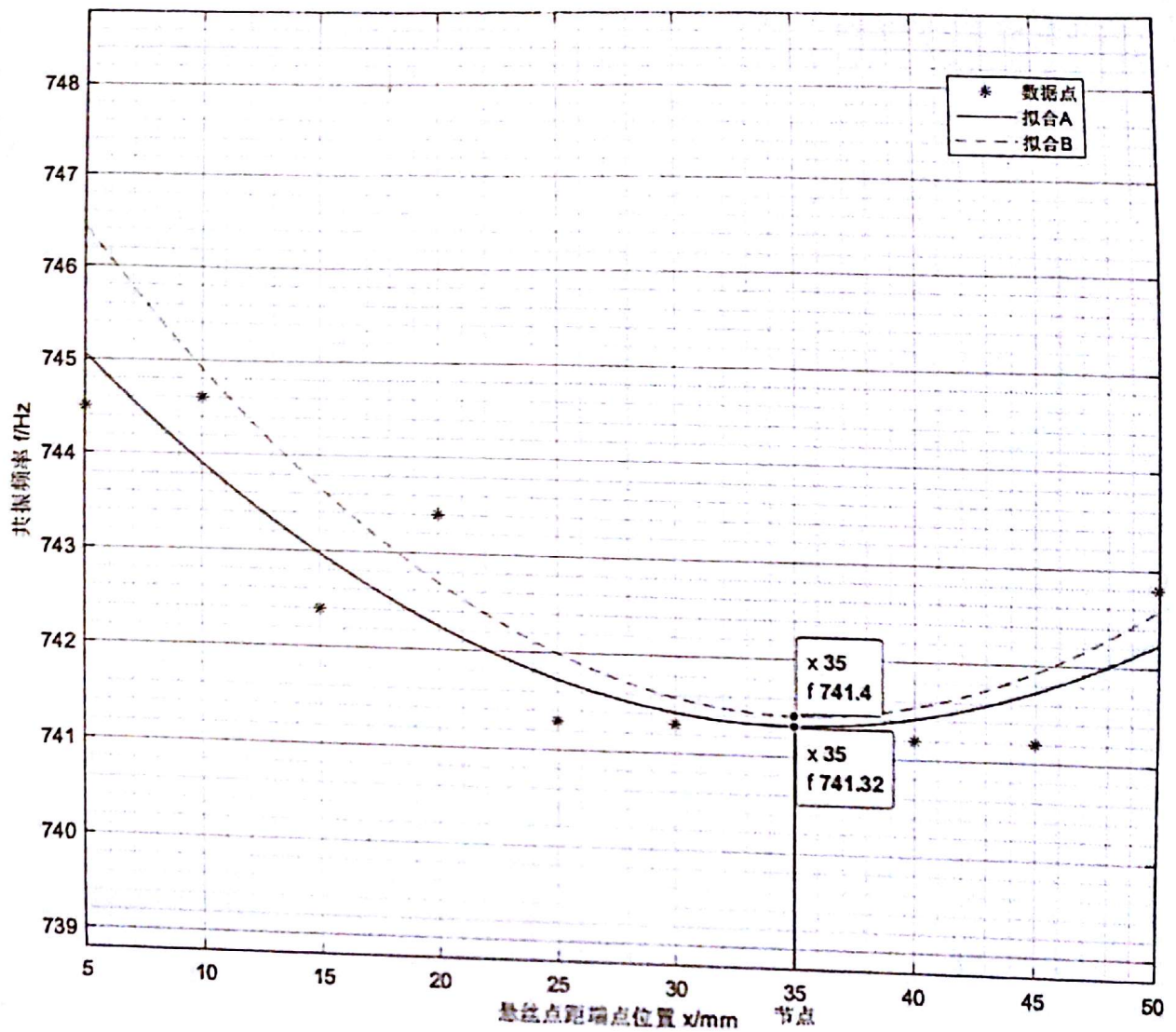
$$\text{因此, 代入公式 } E = 1.6067 \frac{L^3 m}{d^4} f^2 = 1.0737 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad (22)$$

$$\text{不确定度 } U_E = E \sqrt{\left(3 \frac{U_L}{L}\right)^2 + \left(4 \frac{U_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{U_m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{U_f}{f}\right)^2} \\ = 5 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \quad (23)$$

因此该棒的杨氏模量

$$E = (1.074 \pm 0.005) \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad (24)$$

查阅资料知, 铜的杨氏模量约 $110 \sim 128 \text{ GPa}$, 即 $(1.100 \sim 1.280) \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 与式 (24) 结果接近。



注：拟合 A 为根据全部 9 组数据作二次拟合出的结果；拟合 B 为根据 $x = 10, 20, 30, 40, 50\text{mm}$ 的数据作二次拟合出的结果。可以观察到，根据二者拟合出的二次曲线求得的节点位置及其共振频率几乎没有差异。

悬丝点距端点位置 x / mm	5	15	25	35	45
共振频率 f / Hz	744.5	742.4	741.3	-	741.2
悬丝点距端点位置 x / mm	10	20	30	40	50
共振频率 f / Hz	744.6	743.4	741.3	741.2	742.8

- 【误差分析】**
1. 质量测量, 我使用了两个不同的天平共测了4次, 存在不同结果, 最终取了平均值, 这说明天平精度可能引入误差。
 2. 直径测量, 在某一次读数前后, 我发现螺旋测微器的零点修正值改变了0.005mm, 这会引入很大误差, 因此我重新进行了测量, 此次零点修正值偏差几乎不可见, 可采信。
 3. 共振频率测量。
 - (1) 由于两根悬线长度有差异, 因此很难调节使得铜棒水平, 尤其是在 α 较大时铜棒倾斜尤为明显。这可能引入一定误差。
 - (2) 我在对某一 α 对应的 f 作多次观测时, 发现 f 至多有 $\pm 0.5\text{Hz}$ 的偏差, 我尚不能发现该偏差的来源。但这可能对 f 的测量结果带来很大误差。
 - (3) 我分别用了2套仪器对同一根铜棒分别作了测量, 测量结果存在显著差异。我采用了更符合理论的一组数据, 但这也说明仪器可能存在较大误差, 这也会引入一定的误差。

【实验心得及思考题】

思考题 1

课本[实验原理]一节中给出了真假共振峰的判别方法:

(1) 共振频率预估法: 做实验前先用理论公式估算出共振频率的大致范围, 然后进行细致的测量。

(2) 峰宽判别法: 真正的共振峰峰宽十分尖锐, 特别是在室温时, 只要改变激励信号频率约0.1 Hz, 即可判断出试样是否处于最佳共振状态; 而虚假共振峰的峰宽较宽。

思考题 2

查阅《中华人民共和国国家标准》GB/T 2105-91《金属材料杨氏模量切变模量及泊松比测量方法(动力学法)》可知, 若不满足 $d \ll L$ 时, 须在式⑨的基础上乘上一个修正系数 T 。 T 与泊

松比 μ , 回转半径与长度比 $\frac{r}{L}$ 的关系是:

$$T = 1 + 16 \left\{ \frac{(K_1 L)^2 [\sin(K_1 L) + \sinh(K_1 L)]}{\sinh(K_1 L) - \sin(K_1 L)} \cdot \frac{10 + 15\mu + 4\mu^2}{48(1+\mu)} + \frac{(K_1 L) \sin(K_1 L) \sinh(K_1 L)}{\sin(K_1 L) - \sinh(K_1 L)} \cdot \frac{2 - 3\mu - 4\mu^2}{24(1+\mu)} \right\} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \quad (25)$$

易知, ②式中 T 与 μ 关系不大, 查阅资料知铜的泊松比 $\mu = 0.3 \sim 0.4$, 查表有 $\mu = 0.35$ 时, T 与 $\frac{r}{L}$ 的关系为(部分):

$\frac{r}{L}$	0.000	0.005	0.010	0.015	0.020
T	1.0000	1.0021	1.0086	1.0193	1.0344

在本实验中, $\frac{r}{L} = \frac{d}{4L} = 0.0093 \approx 0.010$, 因此 $E_0 = ET = 1.0832 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 与理论值更加接近。

实验心得

本次实验操作较为简单, 但由于设备等原因, 我用了相当长的时间来完成。当然, 最终也完成并做出了正确的结果。这种求是、认真的精神是我最宝贵的收获。